數學傳播 47卷4期, pp. 42-52

廣義的幾何分佈之期望值探討及一些結果

林福林 · 林子喬

作者老家位在台南鹿耳門天后宮的後面, 國小的操場是借用天后宮的廟埕, 小時候有個疑問, 媽祖的信徒擲筊過程預期幾次才會出現連續 3 個聖杯 (以 '000' 表示)? 長大後, 從教科書 [1] 裡學到, 假設擲出聖杯的機率是 1/2, 利用條件機率的期望值可以算出答案是 14, 過程如下: 設 Z 表示第一次'1' (非聖杯) 出現的投擲次數, 例如 $Z=2$ 表示出現 '$01\cdots$', $P(Z=2)=\frac{1}{4}$, $Z=5$ 表示出現 '$00001\cdots$', 設 Y 表示出現 '000' 所需的次數, 經由條件期望值的計算可以列出下式 [1, p.301]

$$\begin{aligned}E[Y]=&E[E(Y\mid Z)]=E[Y\mid Z=1]\cdot P(Z=1)+E[Y\mid Z=2]\cdot P(Z=2)\\&+E[Y\mid Z=3]\cdot P(Z=3)+E(Y\mid Z\geq 4]\cdot P(Z\geq 4)\\=&\frac{1}{2}(1+E(Y])+\frac{1}{4}(2+E[Y])+\frac{1}{8}(3+E[Y])+3\cdot(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8})\end{aligned}\tag{1}$$

整理得 $E[Y]=E[\text{'000'}]=14$, 也就是說擲筊過程預期平均 14 次才會出現連續 3 個聖杯。利用相同的技巧並定義 Y_n 表示連續出現 N 次 '0' 所需的次數, (2) 式列出不同次數的期望值的結果:

$$\begin{aligned}E[Y_N]&=2^N\cdot\sum_{k=1}^{N}k\cdot(\frac{1}{2})^k+N=2^{N+1}-2\\&=[2\ 6\ 14\ 30\ 62\ 126\ 254\ 510\ 1022\ 2046\ \cdots],\end{aligned}\tag{2}$$

其中第 3 項爲 14, 表示連續出現 3 個聖杯的期望值, 或者也可以寫成遞迴關係如下:

$$E[Y_0]=0,\ E[Y_N]=2E[Y_{N-1}]+2=[2\ 6\ 14\ 30\ 62\ 126\ 254\ 510\ 1022\ 2046\ \cdots].\tag{3}$$

延續這樣的討論, 本文想把這個問題一般化。假設硬幣出現人頭(正面) 用 0 表示, 反面用 1 表示, 題目敘述如下:「擲一公正硬幣預期幾次才會出現特定的樣式 (pattern)?」。例如: 預期幾次才會出現樣式 '010101'? 前面 '000' 的例子由於只要出現 '1' 就會從頭來, 所以做法

相對簡單, 狀態圖如圖 1, 其中每一個箭頭代表一次的投擲。如果要求的樣式爲 ‘010’, 圖 2 是出現 ‘010’ 就停止的狀態圖, 會發現每一次的錯誤並不是簡單的從頭來, 因此無法直接利用 (1) 式的作法。

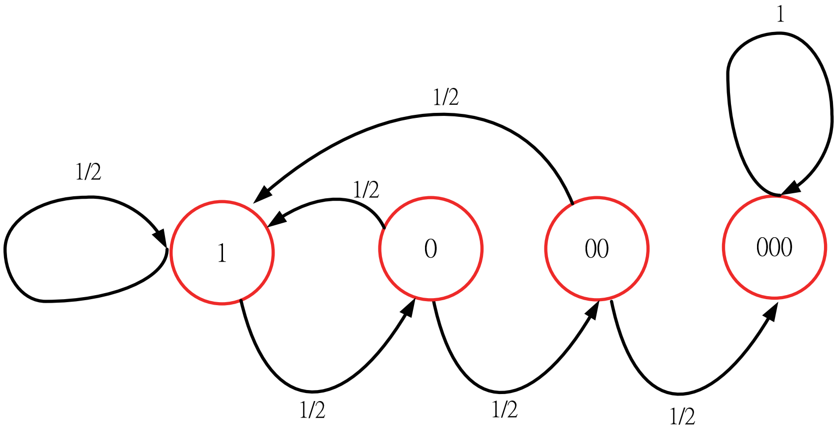

圖 1: 擲硬幣看見 ‘000’ 就停止的例子之狀態圖

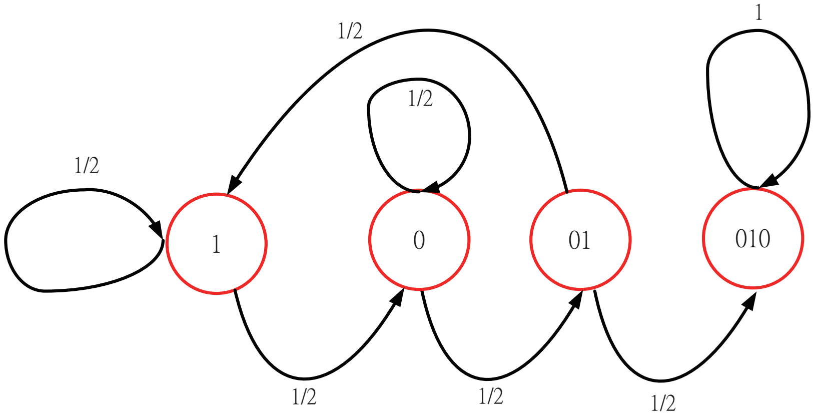

圖 2: 擲硬幣看見 ‘010’ 就停止的例子之狀態圖

本文研究的結論是“每一種樣式對應到一個樣式矩陣, 透過反矩陣運算 (或解聯立方程式或高斯消去法) 可以得到答案”, 這樣的問題我們稱作:「廣義的幾何分佈之期望值」。

先從最簡單的例子說起, 擲一公正硬幣預期幾次才會出現 1 個人頭, 這是最簡單的幾何分佈的例子, 根據幾何分佈的公式答案是 $E[Y_1] = E[\text{‘0’}] = \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{1/2} = 2$ 次, 或者簡單計算過程如下:

$$E[\text{‘0’}] = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + \cdots + n \times \frac{1}{2^n} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k \times \frac{1}{2^k} = 2. \tag{4}$$

接著我們討論 Y_2 的情況, 先來個素養題。小明去逛夜市, 看到一個攤位在玩賭博遊戲。規

則很簡單, 有 4 個樣式可以選擇, 包括 $\{00, 01, 10, 11\}$, '00' 表示連續 2 次人頭朝上。玩 1 次要 5 元, 小明先選其中 1 個樣式, 例如 '00', 假設連續丟擲一枚公正的硬幣, 出現 '010110101100', 當 '00' 出現遊戲就停止, 小明丟了 12 次才停止, 老闆必須付 12 元給小明。本題目敘述如下: (a) 請問小明選擇哪個樣式贏錢的機會較大? (b) 假設玩家隨機選擇 4 個樣式的其中 1 個, 請問當莊家的老闆平均來說是輸是贏? 還是說這個賭博遊戲是公平的?

由於 $E[\text{'01'}]$ 及 $E[\text{'10'}]$ 的答案要到本文中段才會提出簡潔的做法, 這裡我們先採用大學才會學到的馬可夫鏈來求出 $E[\text{'01'}]$。參考教科書 [2, p.180-p.182] 的類似作法, 設定觀察的狀態爲連續 2 次的樣式, 包括 $S_1 = \text{'01'}$, $S_2 = \text{'00'}$, $S_3 = \text{'10'}$ 及 $S_4 = \text{'11'}$, 由於目的是求出 $E[\text{'01'}]$, 我們設定狀態圖如圖 3, 其中 $S_1 = \text{'01'}$ 爲吸收態 (absorbing state), 左轉移矩陣 $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, 刪掉第一行與第一列得到 M 矩陣爲 $M = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, F 向量爲 $\vec{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 計算 $(I - M)^{-1} \times \vec{F} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, 此結果表示由狀態 S_2、S_3、S_4 出發, 平均分別經過 2, 2, 4 個步驟可以到達 $S_1 = \text{'01'}$, 因此 $E[\text{'01'}] = \frac{1}{4}(0 + 2 + 2 + 4) + 2 = 4$, 左式中最後一個 +2 表示起始狀態已經投擲了 2 次。

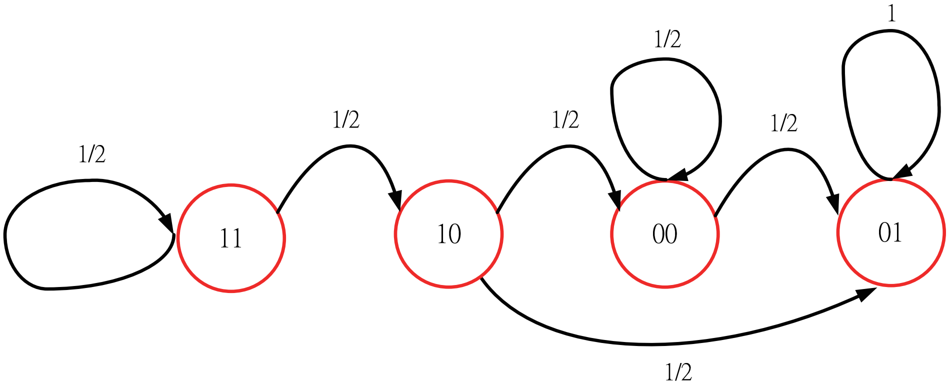

圖3: 結合教科書 [2], 擲硬幣看見 '01' 就停止的狀態圖

由於狀態 $S_2 = \text{'00'}$ 與 $S_4 = \text{'11'}$ 有相同的結構, 由 (2) 式知 $E[\text{'00'}] = E[\text{'11'}] = 6$, 又狀態 $S_1 = \text{'01'}$ 與 $S_3 = \text{'10'}$ 有相同的結構, 由上面討論知 $E[\text{'01'}] = E[\text{'10'}] = 4$, 四種狀態之期望值的平均值爲

$$\text{mean}(S) = \frac{1}{4}(E[\text{'00'}] + E[\text{'11'}] + E[\text{'00'}] + E[\text{'11'}]) = \frac{1}{4} \times (6 + 6 + 4 + 4) = 5,$$

因此我們得知這題素養題的答案是(a) 選擇 ‘00’ 或 ‘11’ 贏錢的機會較大, (b) 這個賭博遊戲是公平的。

也可以說選擇 ‘00’ 或 ‘11’ 平均一次可以賺 1 元, 選擇 ‘01’ 或 ‘10’ 平均一次虧 1 元, 這樣的結果有些顛覆大家平常的認知。簡單的解釋如下: 以選擇 ‘00’ 爲例, 出現 ‘01’ 時就得從頭來, 以選擇 ‘01’ 爲例, 出現 ‘00’ 時第 2 個 ‘0’ 可以留下當 ‘01’ 的第 1 個 ‘0’ 來用, 所以 $E[\text{‘01’}]=4$ 會比 $E[\text{‘00’}]=6$ 小。

爲了降低讀者的疑慮, 我們採用蒙地卡羅模擬來驗證。蒙地卡羅模擬是一種機率統計採用的技術, 可預測不確定事件的可能結果。電腦程式語言使用 Matlab, 此程式模擬小明選擇 ‘01’ 並且玩了 100 萬次, 期望值是 4.0019, 與 $E[\text{‘01’}]=4$ 相比, 誤差很小, 程式寫法如圖 4 所示。

```
clear,  % E[01]

D=[0 1]; N=1000000; M=10000; s=0; B=[0 1];

for k=1:N
    A=[]; A=[A B(randi(2))];
    for m=1:M
        A=[A B(randi(2))]; C=A(m:m+1); a=isequal(C,D);
        if a == 1, s=s+1; F(s)=m+1; break, end
    end
end

P01=mean(F)   % 4.0019
```

圖 4: 蒙地卡羅模擬丟擲硬幣的程式及 $E[\text{‘01’}]$ 的結果

在研究這個題目時我們發現一個可用的公式, $\text{mean}(S)=2^N+N-1$。由於缺乏證明, 先稱之爲第一個猜想, 陳述如下: 已知樣式長度爲 N, 則 2^N 種樣式之期望值的平均值 $\text{mean}(S)=2^N+N-1$, 以 $N=2$ 爲例, 也就是說當不考慮何種樣式, 擲一公正硬幣 $2^2+2-1=5$ 次可以期望看到 4 個樣式各出現一次, 包括 $\{00,01,10,11\}$。我們試著說明第一個猜想成立的理由: 由於每一種樣式都是等機率的, 且每一種樣式誰先誰後都有可能, 因此平均 4 種樣式的每一種會出現 1 次。程式統計結果發現這個猜想在 $N\le 6$ 都是對的, 由於沒有找到相關的文章敘述, 有興趣的讀者也許可以提出方法來證明這個猜想。

行文至此我們換另一個角度來計算 $E[\text{‘01’}]$。想像連續丟擲一枚公正的硬幣 5 次, 根據猜想, $\{00,01,10,11\}$ 平均各別出現 1 次, 所以不考慮單一樣式的情況下, 其期望值的平均值是 $E[\text{‘XX’}]=\frac{1}{4}(E[\text{‘00’}]+E[\text{‘01’}]+E[\text{‘10’}]+E[\text{‘11’}])=2^2+2-1=5$, 玩 1 次要 5 元, 因此這個賭博遊戲是公平的。由 (2) 式知 $E[\text{‘00’}]=E[\text{‘11’}]=6$, 所以 $E[\text{‘01’}]=E[\text{‘10’}]=2\times E[\text{‘XX’}]-6=2\times 5-6=4$, 與前面採用馬可夫鏈來求出 $E[\text{‘01’}]=4$ 是相符的。

爲了處理任意的「廣義的幾何分佈之期望值」的計算, 底下我們將提出一種簡潔且通用的解題技巧。先定義 $f(m,P)$, 其中 P 表示某個樣式, 長度爲 N。函數 $f(m,P)$ 表示樣式 P 中已出現前 m 個單元, 剩餘的樣式平均還需要幾次才能結束。例如: $f(0,\text{‘00’})=6$, $f(1,\text{‘00’})=4$。$f(0,\text{‘00’})=6$ 表示目標是 ‘00’, 如果第 1 個 ‘0’ 還未出現, 平均需要 6 次才會看到 ‘00’, $f(1,\text{‘00’})=4$ 表示目標是 ‘00’, 如果第 1 個 ‘0’ 已經出現, 平均需要 4 次才會看到 ‘00’。再來定義 $g(P_n)$, $n=1,2,\ldots,N$, 假設樣式 P 的前面 n 個單元爲 P_n, P_n 的最後一次出錯, 仍可當作 P 的前面部分樣式的長度 (個數) 稱作 $g(P_n)$。舉例說明, $g(P_n)=0$ 表示最後一次出錯無法取代 P 的前面部分樣式。例如: $g(\text{‘00’})=0$ 表示若第 2 個 0 錯成 1, 那就前功盡棄得重新來, $g(\text{‘01’})=1$ 表示若第 2 個位置的 1 錯成 0, 這個錯掉的 0 可以取代 ‘01’ 的第 1 個位置的 0, 所以 $g(\text{‘01’})=1$, $g(\text{‘00101’})=2$ 表示若第 5 個位置的 1 錯成 0, 後面 2 個 0 可以取代 ‘00101’ 最前面的 2 個 0, 所以 $g(\text{‘00101’})=2$。

我們的問題簡化成給定樣式 P, 求出 $f(0,P)$ 的值即是期望值。以 $g(\text{‘01100’})$ 爲例, 先列出 $g(P_n)$ 函數如下: $g(\text{‘0’})=0$, $g(\text{‘01’})=1$, $g(\text{‘011’})=1$, $g(\text{‘0110’})=0$, $g(\text{‘01100’})=2$。求解樣式 $P(\text{‘01100’})$ 的狀態圖如圖 5 所示, 可提供列式時的參考比較。

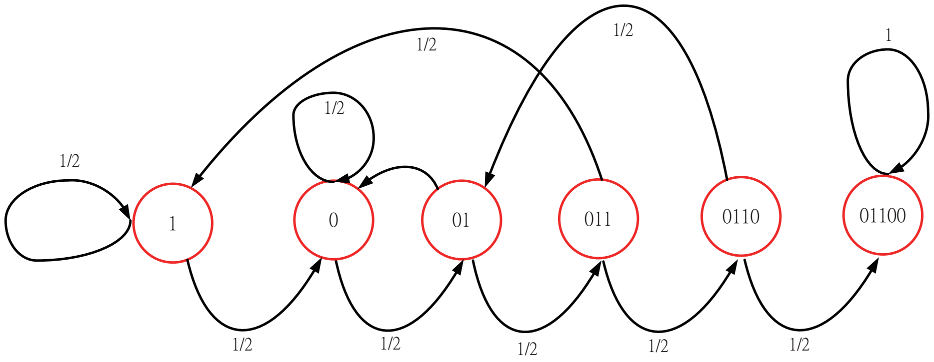

圖 5: 擲硬幣看見 ‘01100’ 就停止的例子之狀態圖

解法如下:

$$
\begin{aligned}
f(0,P)&=\tfrac{1}{2}[1+f(0,P)]+\tfrac{1}{2}[1+f(1,P)],\\
f(1,P)&=\tfrac{1}{2}[1+f(1,P)]+\tfrac{1}{2}[1+f(2,P)],\\
f(2,P)&=\tfrac{1}{2}[1+f(1,P)]+\tfrac{1}{2}[1+f(3,P)],\\
f(3,P)&=\tfrac{1}{2}[1+f(0,P)]+\tfrac{1}{2}[1+f(4,P)],\\
f(4,P)&=\tfrac{1}{2}[1+f(2,P)]+\tfrac{1}{2}\times 1,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

整理後以矩陣表示如下:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} f(0,P) \\ f(1,P) \\ f(2,P) \\ f(3,P) \\ f(4,P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

左邊第 1 個矩陣與樣式 P 無關, 稱作 A 矩陣, 第 2 個矩陣與樣式 P 有關, 稱作 $B(P)$ 矩陣, 兩者相減稱爲 C 矩陣, $C = A - BP$。經由反矩陣運算後得

$$\begin{bmatrix} f(0,P) \\ f(1,P) \\ f(2,P) \\ f(3,P) \\ f(4,P) \end{bmatrix} = [A - B(P)]^{-1} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 32 \\ 30 \\ 26 \\ 16 \end{bmatrix} \Rightarrow f(0, \text{‘01100’}) = 34. \tag{7}$$

因此我們得到樣式 P(‘01100’) 的期望值爲 34。由上述例子可知 $B(P)$ 的每一個列 (row) 只會出現一個 ‘1’, 第 n 個列的 ‘1’ 出現在第 $g(P_n) + 1$ 個位置。例如 g(‘01100’) $= 2$ 表示第 5 個列的 ‘1’ 出現在第 $g(P_5) + 1 = 2 + 1 = 3$ 的位置上。爲了加深讀者對函數 $f(m, P)$ 的理解, 我們再一次補充說明, (7) 式中的 $f(1, P) = 32$ 表示 P(‘01100’) 的第一個 ‘0’ 出現, 平均還需要投擲 32 次才能完成任務, (7) 式中的 $f(4, P) = 16$ 表示 P(‘01100’) 的前四個結果 ‘0110’ 已經出現, 平均還需要投擲 16 次才能完成任務。

介紹了這個技巧後我們再回到前面提到的素養題, 已知 P = (‘01’), g(‘0’) = 0, g(‘01’) = 1, 採用本文提出的方法:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B(\text{‘01’}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

$$[A - B(P)]^{-1} \times b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow f(0, P) = 4. \tag{9}$$

結果得 E[‘01’] = 4, 跟前面的討論是一樣的, 從這個例子可以知道此方法是簡潔有效的。

討論到此, 我們針對樣式長度 $N = 6$ 的情形做更詳細的研究。先舉一個 P(‘000000’) 的例子, 其中 B(‘000000’) 矩陣的 1 只會出現在每一列的第一行, 因爲 g(‘0’) = g(‘00’) = g(‘000’) = g(‘0000’) = g(‘00000’) = g(‘000000’) = 0, 只要錯 1 個就得重新來過。其矩陣

寫法如下:

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&0&0&0\\0&2&-1&0&0\\0&0&2&-1&0\\0&0&0&2&-1\\0&0&0&0&2\end{bmatrix},\ B(\text{‘000000’})=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}2\\2\\2\\2\\2\\2\end{bmatrix},\tag{10}$$

$$[A-B(P)]^{-1}\times b=\begin{bmatrix}126\\124\\120\\112\\96\\64\end{bmatrix}\Rightarrow f(0,P)=126.\tag{11}$$

$E[\text{‘000000’}]=126$ 與 (2) 式的第 6 項結果相符, 我們也觀察到 B 矩陣的元素 1 只出現在第一行, 此時對應到各種樣式期望值的最大值。

再舉一個 $P=(\text{‘001100’})$ 的例子 $g(\text{‘0’})=g(\text{‘00’})=0$, $g(\text{‘001’})=2$, $g(\text{‘0011’})=1$, $g(\text{‘000110’})=g(\text{‘001100’})=0$, 矩陣寫法如下:

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&0&0&0\\0&2&-1&0&0\\0&0&2&-1&0\\0&0&0&2&-1\\0&0&0&0&2\end{bmatrix},\ B(\text{‘001100’})=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}2\\2\\2\\2\\2\\2\end{bmatrix},\tag{12}$$

$$C=A-B(P)=\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0&0\\-1&2&-1&0&0&0\\0&0&1&-1&0&0\\0&-1&0&2&-1&0\\-1&0&0&0&2&-1\\-1&0&0&0&0&2\end{bmatrix},\ P=C^{-1}b=\begin{bmatrix}70\\68\\64\\62\\54\\36\end{bmatrix}\Rightarrow f(0,P)=70.\tag{13}$$

其中的 $f(1) = f(0, P) = 70$ 即表示 $E[‘001100’] = 70$。也可以解聯立方程式如下:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ 得 } x = 70. \tag{14}$$

比較 $P = (‘000000’)$ 與 $P = (‘001100’)$ 的結果知 $E = (‘000000’) = 126$ 大於 $E = (‘001100’) = 70$, 可以發覺樣式 B 矩陣的結構似乎與期望值大小有關聯性。

透過程式的幫忙, 以 $N = 6$ 爲例, 整理一些結果如下:

(1) $N = 6$ 共有 $2^N = 64$ 種樣式, 以 2 進位對應到非負整數 0∼63, 前面 32 個與後面有互補型態, 因此期望值相同, 式 (15) 列出前面 32 個的結果, 第 1 列表示 0 到 9, 第 2 列表示 10 到 19, 依此類推。例如 (‘000000’) 表示 10 進位整數的 0, $E(‘000000’) = 126$; 001100 表示 10 進位自然數的 12, $E(‘001100’) = 70$。圖 6 則是以圖形將結果展示出來。

$$S = \begin{bmatrix} 126 & 64 & 66 & 64 & 70 & 64 & 66 & 64 & 70 & 72 \\ 66 & 64 & 70 & 64 & 66 & 64 & 66 & 68 & 74 & 64 \\ 66 & 84 & 66 & 64 & 66 & 68 & 66 & 72 & 66 & 68 \\ 66 & 64 & & & & & & & & \end{bmatrix}. \tag{15}$$

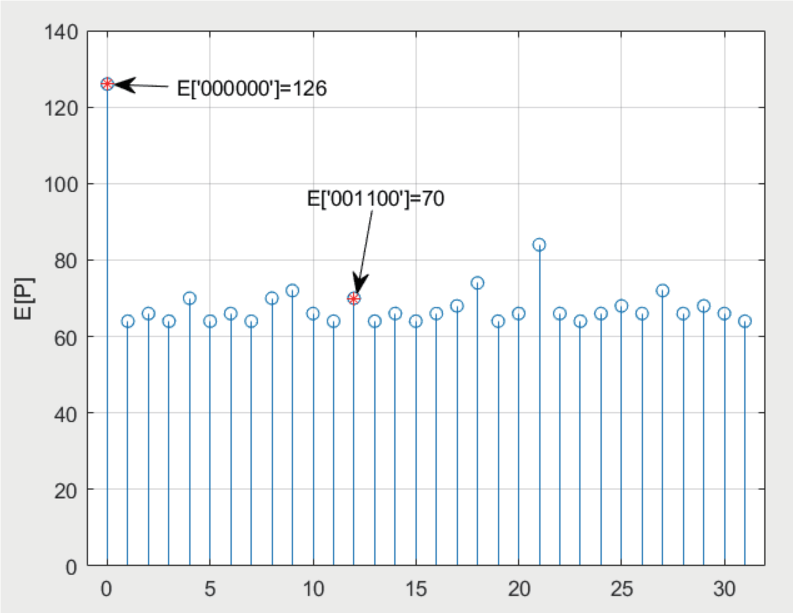

圖 6: $N = 6$ 之前 32 種樣式的期望值

(2) 64 種期望值的平均值 $\text{mean}(S) = E[\text{'XXXXXX'}] = 2^N + N - 1 = 69$, 也就是說當不考慮樣式, 擲一公正硬幣 69 次, 平均 64 種樣式的每一種會出現 1 次, 利用程式統計得到 64 種期望值的平均值確實是 69, 與本文前面提到的第一個猜想相符。

(3) 透過程式幫忙, 我們得到第二組公式, $S_{\max} = 2^{N+1} - 2$, $S_{\min} = 2^N$, 以 $N = 6$ 爲例, 64 種期望值的最大值 $S_{\max} = 2^{N+1} - 2 = 126$, 最小值 $S_{\min} = 2^N = 64$, 與 (15) 式或圖 6 看到的結果相符。最大值 $S_{\max} = 2^{N+1} - 2$ 出現在狀態內元素皆相同時, 例如 $E(\text{'000000'}) = E(\text{'111111'}) = 126$, 這是顯而易見, 因爲元素皆相同時, 不管對了幾個, 只要一錯就前功盡棄從頭來過, 所以期望值最大, 最大值如式 (2) 所示。

(4) 觀察式 (15) 知最小值出現在 10 進位表示法的 $\{1, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 31\}$, 以 1 與 13 爲例, $E(\text{'000001'}) = E(\text{'001101'}) = 64$ 皆是最小值, 其 B 矩陣如式 (16) 所示, 可以看出 B 矩陣中的元素 1 出現的位置座標似乎與期望值有關, 不考慮 B 矩陣的第 1 行, 剩下的元素 1 之行座標總和計算結果是 $D(0) = 0+0+0+0+0+6 = 6$ 及 $D(13) = 0+0+2+1+0+3 = 6$, 同時比較前面提到的 $E(\text{'000000'}) = 126$, 它的 $D(0) = 0+0+0+0+0+0 = 0$, 以及 $E(\text{'001100'}) = 70$, 它的 $D(12) = 0+0+3+2+0+0 = 5$, 我們觀察到當行座標總和越大, 對應的樣式之期望值越小, 似乎可以感覺到 B 矩陣藏著期望值的資訊。有興趣的讀者或是想做數學科展的同學可以把最小值的公式 $S_{\min} = 2^N$ 看成第二個猜想, 繼續研究爲什麼或試著給出嚴格的證明。

$$B(\text{'000001'}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B(\text{'001101'}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

最後我們把相同的技巧推廣到丟擲公正的 6 面骰子, 題目敘述如下:「擲一公正的骰子預期幾次才會出現特定的樣式?」。例如 '123', 經由擴展上述技巧知

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad B(\text{'123'}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$C = A - B(\text{'123'}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \\ -4 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \ P = C^{-1}b = \begin{bmatrix} 216 \\ 210 \\ 186 \end{bmatrix}, \Rightarrow \ f(0, P) = 216. \tag{18}$$

因此我們得到結果是擲一公正的骰子預期 216 次才會出現特定的樣式 ('123'), 或者說期望值

$E(‘123’)=216$。再次採用蒙地卡羅模擬來驗證。考慮運算時間, 此程式只試驗 10 萬次, 期望值是 217.0986, 與 $E(‘123’)=216$ 相比, 誤差約 1.1 次, 誤差比是 0.51%, 應該算合理範圍, 程式寫法如圖 7 所示。

```
clear,  % E[123],骰子

D=[1 2 3]; ld=length(D); N=100000; M=10000; s=0;

for k=1:N
    A=[]; A=[randi(6) randi(6)];
    for m=1:M
        A=[A randi(6)]; C=A(m:m+ld-1); a=isequal(C,D);
        if a == 1, s=s+1; E(s)=m+ld-1; break, end
    end
end

P123=mean(F)   % 217.0986
```

圖 7: 蒙地卡羅模擬擲骰子程式及 $E[‘123’]$ 的結果

年輕人喜歡用數字的組合來表示特殊的句子, 因此我們最後再練習一題, 擲一公正的骰子預期幾次才會出現特定的樣式 (‘1314521’), 它代表 (‘一生一世我愛伊’), 經由類似計算過程得知

$$A=\begin{bmatrix}6&1&0&0&0&0&0\\0&6&1&0&0&0&0\\0&0&6&1&0&0&0\\0&0&0&6&1&0&0\\0&0&0&0&6&1&0\\0&0&0&0&0&6&1\\0&0&0&0&0&0&6\end{bmatrix},B(‘1314521’)=\begin{bmatrix}5&0&0&0&0&0&0\\4&1&0&0&0&0&0\\5&0&0&0&0&0&0\\3&1&1&0&0&0&0\\4&1&0&0&0&0&0\\4&1&0&0&0&0&0\\5&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}6\\6\\6\\6\\6\\6\\6\end{bmatrix},\quad(19)$$

$$C=A-B(‘1314521’)=\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0&0&0\\-4&5&-1&0&0&0&0\\-5&0&6&-1&0&0&0\\-3&-1&-1&6&-1&0&0\\-4&-1&0&0&6&-1&0\\-4&-1&0&0&0&6&-1\\-5&0&0&0&0&0&6\end{bmatrix},$$

$$P=C^{-1}b=\begin{bmatrix}279942\\279936\\279906\\279720\\278646\\272166\\233286\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ f(0,P)=279942. \tag{20}$$

因此我們得到結果爲丟擲一枚公正的骰子, 預期 279942 次才會出現特定的式樣 (‘1314521’), 或者說期望值 E(‘1314521’) = 279942, 這表示需要花很長的時間。計算的程式如圖 8 所示。

```
clear,  format RAT % 連續擲骰子 E[1314521], D=[1 3 1 4 5 2 1]

A=[6 -1 0 0 0 0 0; 0 6 -1 0 0 0 0; 0 0 6 -1 0 0 0; 0 0 0 6 -1 0 0; ...
    0 0 0 0 6 -1 0; 0 0 0 0 0 6 -1; 0 0 0 0 0 0 6 ];
B=[5 0 0 0 0 0 0; 4 1 0 0 0 0 0; 5 0 0 0 0 0 0; 3 1 1 0 0 0 0; ...
    4 1 0 0 0 0 0; 4 1 0 0 0 0 0; 5 0 0 0 0 0 0];
b=[ 6 6 6 6 6 6 6]';

C=A-B; P1314521=inv(C)*b;

P1314521'   % [279942 279936 279906 279720 278646 272166 233286]
```

圖 8: 丟擲公正骰子的矩陣運算程式及 E(‘1314521’) 的結果

最後感謝臉書社團「高中數學討論區」的組員 (沈愈騰沈) 的發文, 他在群組裡提出這樣的問題, 引發作者做出這一篇的研究及相關結果。

參考文獻

1. 桑慧敏。機率與推論統計原理, 高立圖書有限公司, 2008年。
2. B. G. Childers, *Probability and Random Processes*, McGraw-Hill, 1997.

—本文作者林福林任教南台科技大學電子工程學系, 林子喬爲聯發科技技術副理—